[1] 座標平面上の四角形 ABCD は以下の条件を満たすとする．

(a) 頂点 A の座標は $(-1, -1)$ である．

(b) 四角形の各辺は原点を中心とする半径 1 の円と接する．

(c) $\angle$BCD は直角である．

また，辺 AB の長さを l とし，$\angle \mathrm{ABC} = \theta$ とする．

(1) $\angle \mathrm{BAD} = \dfrac{\pi}{\boxed{(1)}}$ である．

(2) 辺 CD の長さが $\dfrac{5}{3}$ であるとき，$l = \dfrac{\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}}$ である．

(3) θ は鋭角とする．四角形 ABCD の面積が 6 であるとき，$l = \boxed{(7)} + \sqrt{\boxed{(8)}}$，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{(9)}}$ である．

[2] 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+1} = -|a_n| - \frac{1}{2}a_n + 5 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすとする.

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_2 = \dfrac{\boxed{(10)}\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}}$，$a_3 = -\dfrac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}}$ である.

(2) $-2 \leqq a_n \leqq -1$ ならば，a_{n+1} および a_{n+2} の取り得る値の範囲は，それぞれ

$\boxed{(16)} \leqq a_{n+1} \leqq \dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$，$-\dfrac{\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}} \leqq a_{n+2} \leqq -\boxed{(21)}$ である.

以下，$a_1 = 2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$ とする.

(3) $a_n < 0$ となる自然数 n のうち最小のものを m とすると，$m = \boxed{(22)}\boxed{(23)}$ である.

(4) **(3)** の m に対して，自然数 k が $2k \geqq m$ を満たすとき，

$$a_{2k+2} = -\frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}a_{2k} - \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$$

より

$$a_{2k} = -\frac{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}} + \frac{3}{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}\left(-\frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}\right)^{k-\boxed{(35)}}$$

が成り立つ.

[3] x の関数が印刷されているカード 25 枚が 1 つの袋に入っている．その内訳は，11 枚に $1-3x$，9 枚に $1-2x$，4 枚に $1-2x+2x^2$，1 枚に $1-3x+5x^2$ である．この袋からカードを 1 枚取り出し，印刷されている関数を記録してから袋に戻すことを 100 回繰り返したところ，記録の内訳は $1-3x$ が 46 回，$1-2x$ が 35 回，$1-2x+2x^2$ が 15 回，$1-3x+5x^2$ が 4 回であった．

(1) 記録された関数の実数 x における値を $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ とおく．$a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ の平均値は，x の値を定めるとそれに対応して値が定まるので，x の関数である．この関数は $x = \dfrac{\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}}$ のとき最小となり，その値は $-\dfrac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}}$ である．

(2) 記録された関数の $x = 0$ から $x = 1$ までの定積分を $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ とおく．$b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ の平均値は $-\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{(44)}\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}}$ である．また，記録された関数の $x=1$ における値を $c_1, c_2, \ldots, c_{100}$ とおくとき，100 個のデータの組 $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_{100}, c_{100})$ の共分散は $\dfrac{\boxed{(48)}\boxed{(49)}}{\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

(3) カードがすべて袋に入った状態から 1 枚取り出したとき，印刷されている関数の $x=1$ における値が負である条件のもとで，その関数の 0 から 1 までの定積分が負である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{(52)}\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}\boxed{(55)}}$ である．

[4] t を実数とする．また，O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}\,(4, 2, 5)$，$\mathrm{B}\,(-1, 1, 1)$，$\mathrm{C}\left(2-t, 4-3t, 6+2t\right)$ をとる．

(1) $\triangle$OAB の面積を求めよ．

(2) 4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるとき，C の座標を求めよ．

(3) 点 C が xy 平面上にあるとき，四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積が **(3)** で求めた V の 3 倍となるような t の値をすべて求めよ．

[5] a を 2 以上の整数，p を整数とし，$s=2^{2p+1}$ とおく．実数 x, y が等式

$$2^{a+1}\log_2 3^x + 2x\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_s 9^y$$

を満たすとき，y を x の関数として表したものを $y=f(x)$ とする．

(1) 対数の記号を使わずに，$f(x)$ を a, p および x を用いて表せ．

(2) $a=2, p=0$ とする．このとき，$n \leqq f(m)$ を満たし，かつ，$m+n$ が正となるような整数の組 (m, n) の個数を求めよ．

(3) $y=f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq 2^{a+1}\right)$ の最大値が 2^{3a} 以下となるような整数 p の最大値と最小値を，それぞれ a を用いて表せ．

[6] 関数 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\int_0^{x+1}\bigl(|t-1|-1\bigr)dt$ に対し，$y=F(x)$ で定まる曲線を C とする．

(1) $F(x)$ を求めよ．

(2) C と x 軸の共有点のうち，x 座標が最小の点を P，最大の点を Q とする．P における C の接線を ℓ とするとき，C と ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．また，Q を通る直線 m が S を 2 等分するとき，ℓ と m の交点 R の座標を求めよ．